1.5 Α. ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Όμοια πολύγωνα : Δύο πολύγωνα που το ένα είναι σμίκρυνση ή μεγέθυνση του άλλου λέμε ότι είναι όμοια .
Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι όμοια

2.

Πρόταση : Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες τότε είναι όμοια.

Ισχύει και το αντίστροφο
Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες

Επεξήγηση :
Οι πλευρές που βρίσκονται στον ίδιο λόγο λέγονται ομόλογες και οι γωνίες που περιέχονται από ομόλογες πλευρές αντίστοιχες

3.

Λόγος ομοιότητας λ : Ονομάζεται ο λόγος δύο ομολόγων πλευρών

4.

Λόγος ομοιότητας και περίμετρος : Ο λόγος ομοιότητας είναι ίσος με τον λόγο των περιμέτρων

5.

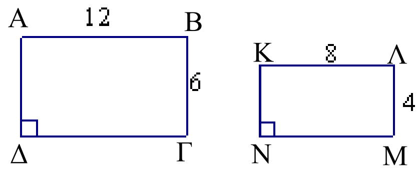
Κλίμακα χάρτη : Είναι ο λόγος της απόστασης δύο σημείων του χάρτη προς την πραγματική απόσταση των σημείων.
Δηλαδή είναι ο λόγος ομοιότητας του σχεδίου του χάρτη προς το πραγματικό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

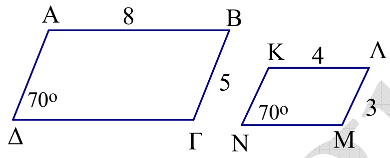
1.

Να εξετάσετε αν τα παραλληλόγραμμα στο διπλανό σχήμα είναι όμοια

α)



β)



Προτεινόμενη λύση

α)

$$\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{\Delta\Gamma}{MN} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{A\Delta}{KN} = \frac{B\Gamma}{\Lambda M} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Άρα $\dfrac{AB}{K\Lambda} = \dfrac{B\Gamma}{\Lambda M} = \dfrac{\Delta\Gamma}{MN} = \dfrac{A\Delta}{KN}$

και όλες οι γωνίες ίσες σαν ορθές οπότε τα ορθογώνια είναι όμοια

β)

$$\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{\Delta\Gamma}{MN} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{A\Delta}{KN} = \frac{B\Gamma}{\Lambda M} = \frac{5}{3}$$

Επειδή $\dfrac{5}{3} \neq 2$, τα παραλληλόγραμμα δεν είναι όμοια

2.

Δύο πολύγωνα Π_1 και Π_2 είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητας του Π_1 προς το Π_2 είναι $\lambda = \dfrac{4}{5}$. Αν η περίμετρος του Π_1 είναι 20 να βρείτε την περίμετρο του Π_2

Προτεινόμενη λύση

Γνωρίζουμε ότι $\dfrac{\text{Περίμετρος } \Pi_1}{\text{Περίμετρος } \Pi_2} = \lambda$ άρα $\dfrac{20}{\text{Περίμετρος } \Pi_2} = \dfrac{4}{5}$ οπότε

4 . (Περίμετρος Π_2) = 100

Περίμετρος Π_2 = 25

3.

Να αποδείξετε ότι δύο κανονικά εξάγωνα είναι όμοια

Προτεινόμενη λύση

Έστω ΑΒΓΔΕΖ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄Ζ΄ τα κανονικά εξάγωνα
Αφού τα πολύγωνα είναι κανονικά έχουν τις πλευρές ίσες και τις γωνίες τους ίσες .
Οπότε $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = EZ = ZA$
και $A'B' = B'\Gamma' = \Gamma'\Delta' = \Delta'E' = E'Z' = Z'A'$

Επομένως $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \dfrac{\Delta E}{\Delta'E'} = \dfrac{EZ}{E'Z'} = \dfrac{ZA}{Z'A'}$

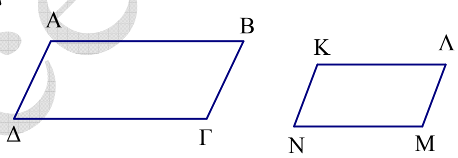
Αν φ είναι μία γωνία του ΑΒΓΔΕ, τότε $\hat{\varphi} = 180^o - \dfrac{360^o}{6} = 120^o$

Επομένως όλες οι γωνίες του ΑΒΓΔΕΖ είναι 120^o
Το ίδιο συμβαίνει και για κάθε γωνία του Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄Ζ΄.
Συνεπώς τα κανονικά εξάγωνα είναι όμοια

4.

Για δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ ισχύει $\dfrac{AB}{A\Delta} = \dfrac{K\Lambda}{KN}$

και $\widehat{A} + \widehat{\Lambda} = 180^o$. Να εξετάσετε αν είναι όμοια



Προτεινόμενη λύση

$\dfrac{AB}{A\Delta} = \dfrac{K\Lambda}{KN}$ άρα $\dfrac{AB}{K\Lambda} = \dfrac{A\Delta}{KN}$

και αφού $AB = \Delta\Gamma$, $A\Delta = B\Gamma$, $K\Lambda = MN$ και $KN = \Lambda M$ τελικά είναι

$\dfrac{AB}{K\Lambda} = \dfrac{A\Delta}{KN} = \dfrac{\Delta\Gamma}{MN} = \dfrac{B\Gamma}{\Lambda M}$

Ακόμα $\widehat{A} + \widehat{\Lambda} = 180^o$ αλλά και $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^o$ οπότε $\widehat{\Lambda} = \widehat{B}$

Τότε $\widehat{A} = \widehat{K}$, $\widehat{\Delta} = \widehat{N}$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{M}$

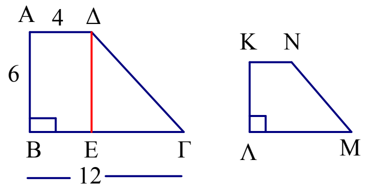
Συνεπώς τα παραλληλόγραμμα είναι όμοια

5.

Τα διπλανά τραπέζια είναι όμοια με λόγο ομοιότητας του ΚΛΜΝ προς το ΑΒΓΔ $\lambda = \frac{2}{3}$. Να υπολογίσετε

α) Την ΔΓ

β) Τις πλευρές του ΚΛΜΝ



Προτεινόμενη λύση

α)

Φέρνω το ύψος ΔΕ. Τότε $ΒΕ = ΑΔ = 4$, οπότε $ΕΓ = 8$

Πυθαγόρειο στο ΔΕΓ $ΔΓ^2 = ΔΕ^2 + ΕΓ^2 =$

$= 36 + 64 = 100$ άρα $ΔΓ = 10$

β)

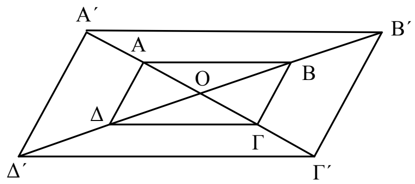
$\frac{ΚΝ}{ΑΔ} = \frac{2}{3}$ άρα $ΚΝ = \frac{2}{3}ΑΔ = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$

Ομοίως $ΚΛ = 4$, $ΛΜ = 8$ και $ΜΝ = \frac{20}{3}$

6 .

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Στις προεκτάσεις των ΟΑ , ΟΒ , ΟΓ και ΟΔ παίρνουμε σημεία Α΄ , Β΄ , Γ΄ και Δ΄ έτσι ώστε ΑΑ΄= ΟΑ , ΒΒ΄= ΟΒ ΓΓ΄= ΟΓ και ΔΔ΄= ΟΔ . Δείξτε ότι τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι όμοια και να βρείτε τον λόγο ομοιότητας.

Προτεινόμενη λύση

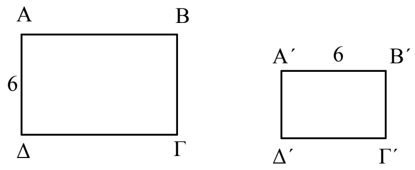


Επειδή ΟΑ΄= 2ΟΑ ,
ΟΒ΄= 2ΟΒ ,
ΟΓ΄= 2ΟΓ ,
ΟΔ΄= 2ΟΔ

το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι ομοιόθετο του ΑΒΓΔ στην ομοιοθεσία με κέντρο το Ο και λόγο $\lambda = 2$.

Άρα τα δύο παραλληλόγραμμα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 2

7 .



Τα διπλανά ορθογώνια είναι όμοια με λόγο ομοιότητας του ΑΒΓΔ προς το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ $\lambda = \frac{4}{3}$. Συμπληρώστε τα παρακάτω κενά

α) ΑΒ = . . . = 8

β) Β΄Γ΄ = . . . = 4,5

γ) $\dfrac{\text{Περίμετρος } Α'Β'Γ'Δ'}{\text{Περίμετρος } ΑΒΓΔ} = \ . \ . \ . = \dfrac{3}{4}$

Προτεινόμενη λύση

α)

Είναι $\dfrac{ΑΒ}{Α'Β'} = \dfrac{4}{3}$ άρα $ΑΒ = \dfrac{4}{3}Α'Β' = \dfrac{4}{3}\cdot 6 = 8$

β)

Είναι $\dfrac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \dfrac{4}{3}$ άρα $Β'Γ' = \dfrac{3}{4}ΒΓ = \dfrac{3}{4}\cdot 6 = 4{,}5$

γ)

Είναι $\dfrac{\text{Περίμετρος } ΑΒΓΔ}{\text{Περίμετρος } Α'Β'Γ'Δ'} = \dfrac{4}{3}$ άρα $\dfrac{\text{Περίμετρος } Α'Β'Γ'Δ'}{\text{Περίμετρος } ΑΒΓΔ} = \dfrac{3}{4}$

8.

Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις ίσες με 5 cm και 8 cm. Ένα άλλο ορθογώνιο όμοιο με αυτό έχει περίμετρο Π΄= 52 cm. Να βρείτε τις διαστάσεις του.

Προτεινόμενη λύση

Αν x και y είναι η ομόλογες διαστάσεις των 5 και 8 του ζητούμενου ορθογωνίου,

τότε $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{x+y}{5+8} = \dfrac{x+y}{13}$ **(1)**

Όμως $2x + 2y = 52$ άρα $x + y = 26$

Η (1) γίνεται $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{26}{13} = 2$ άρα $\dfrac{x}{5} = 2$ και $\dfrac{y}{8} = 2$

$x = 10$ και $y = 16$